

Önermeler ve İspat Yöntemleri:

Doğru yada yanlış kesin bir hüküm bildiren ifadeler **önerme** denir:

$p, q, r, \dots$ gibi harflerle gösterilir.

Ör: Aşağıdaki ifadeleri hangileri birer önermedir??

- a) 2 Asal bir sayıdır. ✓
- b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $2^n + 1$ asaldır. ✓ (Yanlış ama önerme)
- c) Düzlemde bir üçgenin iç açıları toplamı 180° ✓
- d) 4'ten büyük her çift sayının toplamıdır. ✓
- e) Yarı pikenize gidelim x

Tanım:

İfadesinde değişkenler bulunan ve bu değişkenlerin alacağı değerlere göre doğru yada yanlış olabilen ifadeler **açık önerme** denir. $p(x), p(x, y) \dots$ gibi sembollerle ifade edilebilirler.

Ör: $x \in \mathbb{R}$ ö.ü. $p(x) = x^2 + x = 0$ 'dır önermesi verilsin.

$$x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0$$

$p(0)$ ve $p(-1)$ 'dir.

Birleşik Önermeler:

p ve q iki önerme olsun " $p \vee q$ "

önermesi bu önermelerden her ikisinde doğru iken doğru aksi halde yanlış olan önermedir.

Buna da iki önermenin birleşimi denir.

ve $p \wedge q$ ile gösterilir.

↓
ve

Tanım: p ve q iki önerme olsun " p veya q "

önermesi de bu önermelerde en az biri doğru iken

doğru aksi halde yanlış olan önermedir.

Buna iki önermenin birleşimi denir ve $p \vee q$

ile gösterilir.

Not: Doğru $\rightarrow$ D veya 1

ile gösterilir.

Yanlış $\rightarrow$ Y veya 0

Not:

Önermelerin ve bunlara karşılık gelen önermelerin alacağı tüm değerleri gösterdiğimiz tabloya doğruluk değerleri tablosu denir.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

Tanım: Bir p önermesi doğru iken yanlış, yanlış iken doğru olan önermeye p 'nin değil veya olumsuzu denir ve $p', \sim p, \neg p, \bar{p}$ sembolleriyle gösterilir.

p	p'
1	0
0	1

Ör p: Bir gün 24 saatdır.

↓
p: Bir gün 24 saat değildir.

q(x): $x^2 < 7$ dir

↓
q'(x): $x^2 \geq 7$

Tanım:

Doğruluk değerleri her zaman aynı olan p ve q önermelerine Denk önermeler denir ve $p \equiv q$ ile gösterilir.

p(x) ve q(x) aşık önermelerinin denk olması için her x için p(x) ve q(x) önermelerinin doğruluk değerleri aynı olmalıdır.

Ör

p: Her doğal sayı tekdir

q: 63 Asaldır

0
0
0
p ≡ q

Ör: r(x): $x^2 < 25$

s(x): $x < 5$ ve $x > -5$

t(x): $|x| < 5$ olsun.

$x^2 < 25 \Rightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{25}$
 $|x| < 5$
 $-5 < x < 5$
r ≡ s ≡ t

De Morgan kuralları.

$$(p \wedge q)' = p' \vee q'$$

$$(p \vee q)' = p' \wedge q'$$

İspat:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q)'$	p'	q'	$p' \vee q'$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

Tanım:

" $p \Rightarrow q$ " önermesi p doğru ve q yanlış iken yanlış, aksi halde doğru olan önermedir. Buna koşullu önerme denir ve $p \Rightarrow q$ ile gösterilir.

Burada p'ye hipotez, q'ya Sonuç

önermesi denir, ve p, q'yu gerektiriyen şekilde olunur.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Ör: $2 < 1 \Rightarrow 2 < 3$ önermesi doğru mu?

p=0 $\Rightarrow$ q=1

0 $\Rightarrow$ 1 (1)

Not

$$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$$

Tanım:

($p \Rightarrow q$ ve $q \Rightarrow p$) önermeleri aynı anda doğru iken doğru, aksi halde yanlış olan önermeye iki yönlü koşullu önerme denir. ve $p \Leftrightarrow q$ ile gösterilir.

P	q	$P \Rightarrow q$	$q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	0

$$P \Leftrightarrow q \equiv (P \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow P)$$

Ör Bir asal sayı çifttir, ancak ve ancak 2'dir önermesini ele alalım.

P: n asal bir çift sayıdır. $P \Rightarrow q$ ✓

q: Bu asal sayı 2'dir. $q \Rightarrow P$ ✓

$$P \Leftrightarrow q \equiv (P \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow P) \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$$

Ör $x \in \mathbb{R}$ o.ü $\forall x$ için $|x|=1 \Leftrightarrow x^3=x$ önermesi doğru mu???

P: $|x|=1$

q: $x^3=x$

$$\begin{aligned} |x|=1 &\Rightarrow x \in \{-1, 1\} \\ x^3 &\stackrel{?}{=} x \\ (-1)^3 &= -1 \\ (1)^3 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow 1$$

$$\begin{aligned} x^3 &= x \Rightarrow |x|=1 \\ x^3 - x &= 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \\ x &= 0 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

$$1 \Leftrightarrow 0 \equiv 0 \quad (\text{yanlıştır})$$

Niceleyiciler:

Önermedeki her, en az bir, gibi kelimelere niceleyici denir.

Ör Bir $p(x)$ açık önermesi bütün x'ler için $p(x)$ doğrudur.

Evrensel niceleyici $\forall x, p(x)$

Yada, en az bir x için $p(x)$ doğrudur.

$\exists x, p(x)$

Varlıksal niceleyici

Ör Aşağıdaki önermelerin doğru olup olmadığını inceleyin.

a) $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $|x|=x$ tir

Örneğin: $x=-1 \in \mathbb{Z}$ Fakat $|-1| \neq -1 \rightarrow 0$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $x^2 - x + 2 \neq 0$ dir.

$$\Delta = 1 - 4(1)(2) = -7 < 0 \rightarrow 1$$

c) $\exists x \in \mathbb{R}$ için $x^2 = x$ tir

$$x=0 \text{ olsun } 0^2 = 0 \rightarrow 1$$

d) $\exists n \in \mathbb{N}$ için $3 \cdot (n+2)$ asaldır.

Not: $\sim(\exists, p(x)) = \forall, \sim p(x)$

$$\sim(\forall, p(x)) = \exists, \sim p(x)$$

Ör:

$$\sim(\forall x, x+3 < 10) \equiv \exists x, x+3 \geq 10$$

$$\sim(\exists x, x+3 = 7) \equiv \forall x, x+3 \neq 7$$

Teorem ve ispat yöntemleri :

Tanım: Doğruluğu ispatlanmış önermelere teorem denir. Teoremler genellikle $p \Rightarrow q$ şeklinde verilir. Bunu ispatlamak için p doğru iken q 'nın doğruluğunu gösterme yeterlidir. Teorem $p \Rightarrow q$ şeklinde verilirse $p \Rightarrow q$ ve $q \Rightarrow p$ önermelerinin doğruluğunu ispatlanır.

Temel ispat yöntemleri :

A) Doğruluk çizelgesi yöntemi :

Bu yöntemle bir teoremin her zaman doğru olduğunu tablo ile gösterilir.

ör $(p \Rightarrow q \vee r' \Rightarrow q)$ önermesi doğru ise $r' \Rightarrow q$ önermesinin doğru olduğunu gösterin.

Hipotez $\rightarrow H: (p \Rightarrow q \vee r' \Rightarrow q)$

Sonuç $\rightarrow S: (r' \Rightarrow q)$

Amaç: $H \Rightarrow S$ teoremin her zaman doğru olduğunu göstermek:

p	q	r	p'	q'	r'	$p \Rightarrow q$	$r' \Rightarrow q'$	H	S	$H \Rightarrow S$
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Not :

Bir önermenin bütün doğruluk değerleri 1 ise bu önermeye bir tautoloji denir. Eğer bütün doğruluk değerleri 0 ise bu önermeye bir çelişki denir.

2- Doğrudan ispat yöntemi :

Bu yöntemde, $p \Rightarrow q$ önermesini ispatlamak için daha önceden doğru old. bilenen: $p \Rightarrow r, r \Rightarrow r_1, r_1 \Rightarrow r_2, \dots, r_n \Rightarrow q$ önermeler zincirinden yararlanılır.

ör: "Bir tek doğal sayının karesi tektir" önermesini doğruluğunu ispatlayınız

S: $p: n$ tek doğal sayıdır. $\rightarrow p \Rightarrow q=?$
 $q: n^2$ tektir.

n tek bir sayı $\Rightarrow n = 2k+1, \exists k \in \mathbb{Z}$

$n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

$n^2 = 2m+1$

$\Rightarrow n^2$ tektir

$p \Rightarrow q$ Doğrudur.

3. Dolaylı ispat yöntemi:

$P \Rightarrow Q$ önermesi yerine $Q' \Rightarrow P'$ önermesi ispatlanır.

Burada, $Q' \Rightarrow P'$ önermesine $P \Rightarrow Q$ 'nun karşıt tersi denir.

Ör:

a ve b iki doğal sayı olan a.b çarpımı çift bir sayıysa a ve b den en az biri bir çift sayıdır. Dolaylı ispatla ispatlayınız.

Ç:

$P: a.b \text{ çifttir.}$
 $Q: a \text{ ve } b \text{ den en az biri çifttir.}$ $\Rightarrow P \Rightarrow Q??$

$P': a.b \text{ tek bir.}$
 $Q': a \text{ ve } b \text{ tek bir.}$ $\Rightarrow Q' \Rightarrow P'??$

$a \text{ tekse } \Rightarrow a = 2m+1$
 $b \text{ tekse } \Rightarrow b = 2n+1$
 $a.b = (2m+1)(2n+1)$
 $= 4mn + 2m + 2n + 1$
 $\Rightarrow 2(2mn + m + n) + 1$
 $2k+1 \Rightarrow a.b = 2k+1 \Rightarrow a.b \text{ tek bir.}$

Ör: $3x+2 \neq 5$ ise $2x+3 \neq 5$ old'nu gösteriniz.

$P: 3x+2 \neq 5$ $Q: 2x+3 \neq 5 \Rightarrow P \Rightarrow Q??$

Dolaylı: $P': 3x+2 = 5$ $Q': 2x+3 = 5$

$Q' \Rightarrow P': 2x+3=5 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow 3.1+2=5$

Doğrudan: $3x+2 \neq 5 \Rightarrow 3x \neq 3 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow 2x \neq 2 \Rightarrow 2x+3 \neq 5$

4. Çelişki Yöntemi

$P \Rightarrow Q$ önermesini ispatlamak için P'nin doğru olduğu kabul edilir.

Bu kabula göre Q'nun yanlış olduğu kabul edilip bir çelişki elde edilmeye çalışılır. Böylece, Q'nun doğru old. sonucuna varılır.

Ör

a bir tamsayı o.ü $6 \mid a \Rightarrow 2 \mid a$ old'nu ispatlayınız.

$6 \mid a \text{ olsun } \Rightarrow \frac{a}{6} = k \in \mathbb{Z}$

$2 \nmid a \Rightarrow a \text{ çift değildir}$

$a = 6k = 2(3k) \Rightarrow a \text{ çifttir. } \times \text{ Çelişki}$

Not: Her zaman doğru olduğu iddia edilen bir önermenin yanlış olduğunu göstermek için sadece 1 tane örnek vermek yeterlidir. Yani, $p \Rightarrow q$ önermesinde p 'yi doğru fakat q 'yu yanlış yapan bir örnek aranır.

ör: a, b, c, d tam sayılar olsun $a \cdot b \mid c \cdot d \Rightarrow a \mid c \vee b \mid d$ doğrudur.

S: Önerme doğru değildir. Örneğin $a=6, b=5, c=10$ ve $d=9$ olsun.

$$6 \cdot 5 = 30 \mid 9 \cdot 10 = 90 \quad \checkmark \quad \begin{array}{c} 6 \mid 10 \times \\ 5 \mid 9 \times \end{array}$$

ör: $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

varsayalım: $\frac{a}{b} : b \neq 0 \quad (a, b) = 1$ (asal)

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

$$\xrightarrow{(2n)^2} \Rightarrow a^2 = \text{çifttir} \Rightarrow a \text{ çifttir} \Rightarrow a = 2m \text{ şeklindedir} \Rightarrow 4m^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2m^2$$

$$b^2 \text{ çifttir} \Rightarrow b \text{ çifttir} \Rightarrow b = 2n$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2m}{2n} \Rightarrow a \text{ ile } b \text{ aralarında asal değildir}$$

$$\sqrt{2} \Rightarrow \text{rasyonel değil} \Rightarrow \text{irrasyonel}$$

5. Tüme Varım Yöntemi

Oldukça kuvvetli bir ispat tekniği olan tüme varım yöntemini bir örnekle açıklayalım.

Varsayalım: n ardışık tek doğal sayının toplamı daima n^2 'dir.

n	ilk n ardışık tek sayının toplamı	n^2	$\forall n$ için doğrumu?
1	$1 \rightarrow 1$	$\rightarrow 1^2$	$S_1 : 1 = 1^2$
2	$2 \rightarrow 1 + 3 = 4$	$\rightarrow 2^2$	$S_2 = 1 + 3 = 2^2$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
n	$n \rightarrow 1 + 3 + \dots + (2n-1) =$	$\rightarrow n^2$	$S_n : 1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$

Tümevarım Yöntemi:

$\forall n \in \mathbb{N}$ için s_n ifadesinin doğruluğunu tümevarımla ispatlamak için aşağıdaki yol izlenir:

1): s_1 ifadesinin doğruluğu gösterilmelidir (Başlangıç şartı)

2): Herhangi bir $k \geq 1$ için $s_k \Rightarrow s_{k+1}$ ifadesinin doğruluğu ispatlanmalıdır (Tümevarım hipotezi)

Ör: $n \in \mathbb{N}$ o.ü $1+3+\dots+(2n-1)=n^2$ old.'nu ispatlayınız.

1- $s_1: n=1$ için ; $1=1^2$ ✓

2- s_k doğru olsun : $1+3+\dots+(2k-1)=k^2$ olsun.

$$s_{k+1} ? [1+3+\dots+(2k+1)] \stackrel{?}{=} (k+1)^2$$

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} 2k+2-1 \\ (2k+1) \end{array} & \downarrow \\ a_1+a_2+\dots+a_k+a_{k+1} & \downarrow & k^2+2k+1 \\ & k^2+2k+1 & \checkmark \end{array}$$

Ör: n negatif olmayan bir tam sayı o.ü $s \mid n^5 - n$ old.'nu gösteriniz.

(1): $s_0: s \mid 0^5 - 0 \rightarrow \frac{0}{s} = 0$ ✓

(2): s_k doğru olsun $\Rightarrow s \mid k^5 - k$ olsun $\Rightarrow s_{k+1} ?$

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r \Rightarrow (a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 \cdot b^0 + \binom{2}{1} a^1 \cdot b^1 + \binom{2}{2} a^0 \cdot b^2$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\frac{n!}{(n-r)!r!} \quad 2ab \quad 1 \cdot 1 \cdot b^2$$

$$(k+1)^5 = \underbrace{\binom{5}{0} \cdot k^5 \cdot 1^0}_{k^5} + \underbrace{\binom{5}{1} \cdot k^4 \cdot 1^1}_{5 \cdot k^4} + \underbrace{\binom{5}{2} \cdot k^3 \cdot 1^2}_{10k^3} + \underbrace{\binom{5}{3} \cdot k^2 \cdot 1^3}_{10k^2} + \underbrace{\binom{5}{4} \cdot k \cdot 1^4}_{5k} + \underbrace{\binom{5}{5}}_1$$

$$\cancel{k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1} \Rightarrow k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 = 5k^4 + 5k^3 + 5k^3 + 5k^2 + 5k^2 + 5k + 1 = 5k^3(k+2k+2k+1) = 5 \cdot (a+b) = 5 \cdot c$$

$$s \mid n^5 - n \quad \checkmark$$

Tanım: iyi tanımlanmış ^{kümeler} nesnelerin bir topluluğu küme denir.

Eğer, bir x elemanı bir A kümesine aitse $x \in A$, aksi halde $x \notin A$ ile gösterilir. Bir kümeyi 3 farklı şekilde gösterebilirsiniz:

* $A = \{1, 3, 5, 7\}$ * ortak özellik $A = \{x \in \mathbb{R}, (x-1)(x^2-8x+15)=0\}$

* Venn şeması: 

Tanım:

A ve B iki küme olsun. Eğer A 'nin her elemanı aynı zamanda B 'ninde bir elemanı ise A 'ya B 'nin alt kümesi denir ve $A \subseteq B$ ile gösterilir.

$$A \subseteq B \Rightarrow \forall x \in A : x \in B$$

Eğer, $A \subseteq B$ iken B 'de A 'ya ait olmayan en az bir eleman varsa ($A \neq B$) A 'ya B 'nin bir öz alt kümesi denir ve $A \subset B$ veya $A \subsetneq B$ ile gösterilir. Eğer $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$ 'dir.

Tanım:

A ve B iki küme olsun, A 'da olup B 'de olmayan elemanların kümesine A ile B 'nin farkı denir ve $A - B$ veya A/B ile gösterilir.

$$A/B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \in A : x \notin B\} = \{x : x \in A \wedge x \in B'\}$$

$x \in A \cap B'$

Tanım: üzerinde çalışılan en geniş kümeye Evrensel küme denir ve E ile gösterilir. A herhangi bir küme o.ü A 'da olmayan elemanların kümesine A 'nın tümleyini denir ve A' veya $\bar{A}$ ile gösterilir.

$$A' = \{x : x \notin A\} = \{x \in E : x \notin A\} = E/A$$

$\{\} \vee \emptyset \rightarrow$ Boş küme

Tanım: A ve B iki küme olsun A 'ya da B 'den en az birine ait olan elemanların kümesine A ile B 'nin birleşimi denir ve $A \cup B$ ile gösterilir.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

A ve B'nin her ikisinde de ait olan elemanların kümesine A ile B'nin kesişimi denir ve $A \cap B$ ile gösterilir. $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Özellikler:

(1): (a): $A \subseteq A$.. (yansıma özelliği y.ö) (b): $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$

(c): $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

(2): $A \cup A = A \cap A = A$

(3): $A \cup \emptyset = A$ ve $A \cap \emptyset = \emptyset$

(4): $A \cup B = B \cup A$ ve $A \cap B = B \cap A$ dir.

(5): (a): $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ve (b): $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

İspat . ①

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

②

$x \in A \cap (B \cup C)$ olsun $\Leftrightarrow x \in A$ ve $x \in B \cup C$

$\Leftrightarrow (x \in A) \text{ ve } (x \in B \text{ veya } x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \text{ ve } x \in B) \text{ veya } (x \in A \text{ ve } x \in C)$
 $\Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ veya } x \in A \cap C$
 $\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(6): $\emptyset' = E$ ve $E' = \emptyset$

(7): $(A \cup B)' = A' \cap B'$; $(A \cap B)' = A' \cup B'$

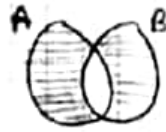
(8): $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

(9): $A \subseteq A \cup B$ (b): $A \cap B \subseteq A$
 $B \subseteq A \cup B$ $A \cap B \subseteq B$

(10): $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$ ve $A \cap B = A$

Tanım: A ve B iki küme olsun $A \cup B$ 'ye ait olup $A \cap B$ 'ye ait olmayan elemanların kümesine A ile B'nin Simetrik farkı denir ve $A \Delta B$ ile gösterilir.

$$A \Delta B = \{x : x \in A \cup B \text{ ve } x \notin A \cap B\} = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$



$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Tanım:

$A_1, \dots, A_n$ birer küme ve $I = \{1, 2, \dots\}$ olsun. işte bir takım kümesi indislemek için kullandığımız I kümesine bir indis kümesi, $\forall i \in I$ elemanına bir indis ve $\forall i \in I$ için A_i kümesinde bir indislenmiş küme denir. Elemanları bir I indis kümesi tarafından indislenmiş kümelerin kümesine de bir kümeler ailesi denir. Böyle bir aile:

$$A = \{A_i : i \in I\} \text{ ile gösterilir.}$$

ör: $A = \left\{ \underbrace{\{a, b\}}_{A_1}, \underbrace{\{a\}}_{A_2}, \underbrace{\{a, e, f, g\}}_{A_3}, \underbrace{\{a, c\}}_{A_4} \right\}$ ve $I = \{1, 2, 3, 4\}$

Tanım:

$A = \{A_i : i \in I\}$ kümeler ailesi verilsin. Bu ailenin birleşimi:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists i \in I \text{ için } x \in A_i\} \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall i \in I \text{ için } x \in A_i\} \text{ 'dir.}$$

$$\bigcup_{i=1}^4 A_i = \{a, b, c, e, f, g\}; \quad \bigcap_{i=1}^4 A_i = \{a\}$$

ör $I = \{1, 2, \dots\}$ ve her $n \in I$ için $A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$ olsun.

★ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = [0, 1]$ $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$

Genelleştirilmiş Dağılıma Kuralları:

$\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ ve $\mathcal{B} = \{B_j : j \in J\}$ aileleri verilsin.

Bu durumda:

(i): $(\cup_i A_i) \cap (\cup_j B_j) = \cup_i (\cup_j (A_i \cap B_j))$ ve

(ii): $(\cap_i A_i) \cup (\cap_j B_j) = \cap_i (\cap_j (A_i \cup B_j))$ 'dir

İspat:

(i): $x \in (\cup_i A_i) \cap (\cup_j B_j)$ olsun.

$\Rightarrow x \in \cup_i A_i \wedge x \in \cup_j B_j$ 'dir.

$\Rightarrow (\exists i \in I \text{ için } x \in A_i) \wedge (\exists j \in J \text{ için } x \in B_j)$

$\Rightarrow \exists i \in I, \exists j \in J \text{ için } (x \in A_i \cap B_j)$

$\Rightarrow \exists i, \exists j \text{ için } x \in A_i \cap B_j$

$\Rightarrow x \in \cup_i (\cup_j (A_i \cap B_j))$ olur.

Genelleştirilmiş De Morgan kuralları:

$\{A_i : i \in I\}$ ailesi verilsin Bu durumda;

1) $(\cap_i A_i)' = \cup_i A_i'$ ve 2) $(\cup_i A_i)' = \cap_i A_i'$ 'dir.

İspat:

1) $x \in (\cap_i A_i)'$ olsun. $\Leftrightarrow x \notin \cap_i A_i \Leftrightarrow \exists i \text{ için } x \notin A_i$

$\Leftrightarrow \exists i \text{ için } x \in A_i' \Rightarrow x \in \cup_i A_i'$

Ör: $\overbrace{A \cup B}^p = \overbrace{B \cap C}^q \Rightarrow A \subseteq \overbrace{B \subseteq C}^q$ old'nu gösteriniz.

$A \subseteq A \cup B = B \cap C \Rightarrow A \subseteq B \cap C$ --- (1)

$B \cap C \subseteq B$ --- (2)

$A \subseteq B$ ★



$B \subseteq A \cup B = B \cap C \Rightarrow B \subseteq B \cap C$ --- (1)

$B \cap C \subseteq C$ --- (2)

$B \subseteq C$ ★★

★ ve ★★ 'dan $A \subseteq B \subseteq C$

Ör: $(A \cup B)' = A' \cap B'$ old'nu gösteriniz.

$x \in (A \cup B)'$ olsun. $\Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

$\Rightarrow x \in A' \wedge x \in B' \Rightarrow \boxed{x \in A' \cap B'}$

ya da tablo ile gösterebilirsiniz

Ör: $A - B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$ old'nu ispatlayınız.

$(\Rightarrow)$ $A - B = \emptyset$ olsun $\forall x \in A$ için $x \in B \Rightarrow$ çelişki yöntemi

kullanarak ; $x \notin B$ olsun $\Rightarrow x \in B' \rightarrow x \in A \cap B' = A - B$ Fakat, bu durum

$A - B = \emptyset$ olmasıyla çelişir. O halde $x \in B$ olmalıdır. $\Rightarrow A \subseteq B$ dir. $(\Leftarrow)$

$A \subseteq B$ olsun $\Rightarrow A - B = \emptyset$

$$A - B = A \cap B' = (A \cap B) \cap B' = A \cap \underbrace{(B \cap B')}_{\emptyset} = \emptyset$$

Ör: $A \cup B = E$ ve $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B = A'$ old'nu ispatlayınız.

$(\Rightarrow)$ $x \in A'$ olsun. $x \notin A$ olmalı $\Rightarrow x \in B \Rightarrow A' \subseteq B$

$x \in B$ olsun $\Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in A' \Rightarrow B \subseteq A' \quad \underline{B = A'}$

$(\Leftarrow)$ $B = A'$ olsun $\Rightarrow A \cup B = A \cup A' = E$
 $A \cap B = A \cap A' = \emptyset$

Bağıntılar ve özellikleri

Tanım:

a ve b herhangi iki eleman o.ş. (a, b) şeklindeki bir ifadeye bir sıralı ikili denir. Burada, a 'ya 1. bileşen, b 'ye 2. bileşen denir.

Eğer, $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$ olmalıdır. Benzer şekilde, $(x_1, \dots, x_n)$

şeklindeki bir ifadeye de bir sıralı n -li denir.

Tanım:

A ve B iki küme olsun 1. bileşen: A 'dan, 2. bileşen: B 'den olan bütün sıralı ikililerin kümesine A ile B 'nin Kartezyen Çarpımı denir, ve $A \times B$ ile gösterilir

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

$$B = A \text{ olsun: } A^2 = A \times A$$

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in A\}$$

Teorem: A, B, C, D birer küme olsun. Buna göre:

$$1) A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$$

$$2) A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$3) A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$4) A \subseteq B \Rightarrow A \times C \subseteq B \times C$$

$$5) A \subseteq B \text{ ve } C \subseteq D \Rightarrow A \times C \subseteq B \times D \text{ 'dir.}$$

İspat:

$$3) (a, b) \in A \times (B \cap C) \text{ olsun } \Rightarrow (a \in A) \wedge (b \in B \cap C)$$

$$\Rightarrow (a \in A) \wedge (b \in B \wedge b \in C) \Rightarrow (a, b) \in A \times B \text{ ve } (a, b) \in A \times C$$

$$\Rightarrow (a, b) \in (A \times B) \cap (A \times C) \text{ 'dir. } \Rightarrow A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$$

Teorem:

$\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ ve $\mathcal{B} = \{B_j : j \in J\}$ aileleri verilsin.

$$1) \left(\bigcup_i A_i \right) \times \left(\bigcup_j B_j \right) = \bigcup_{(i,j)} (A_i \times B_j)$$

$$2) \left(\bigcap_i A_i \right) \times \left(\bigcap_j B_j \right) = \bigcap_{(i,j)} (A_i \times B_j) \text{ dir.}$$

Ör:

A, B, C, D kümeleri verilsin. Buna göre $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ eşliğinin her zaman doğru olmadığını gösteriniz.

$A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{b\}$, $D = \{2, 3, 4\}$ olsun

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

$$\{a, b\} \times \{1, 2, 3, 4\}$$

$$C \times D = \{(b, 2), (b, 3), (b, 4)\}$$

$$\{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 4)\}$$

$$U = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 4)\} \neq$$

Tanım:

A ve B birer küme olsun $A \times B$ 'nin her alt kümesine

A'dan B'ye bir bağıntı denir.

Ör:

$A = \{a, b, c, d, e\}$ ve $B = \{1, 2, 4, 6\}$ olsun. Buna göre;

$$\beta_1 = \{(a, 2), (a, 4), (b, 1), (d, 1), (c, 6)\} \subseteq A \times B$$

$$\beta_2 = \{(a, b), (b, b), (c, c)\} \subseteq A \times A$$

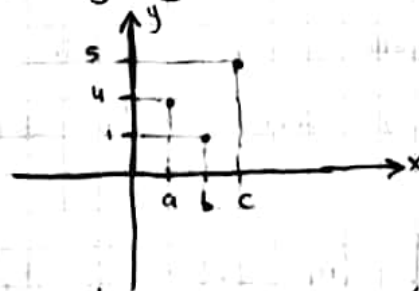
Tanım: β, A' dan B' ye bir bağıntı olsun. ($\beta \subseteq A \times B$)

$\beta^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \beta\}$ bağıntısına β 'nin ters bağıntısı denir

ve ($\beta^{-1} \subseteq B \times A$)'dir.

Tanım: $\beta \subseteq A \times B$ olsun. Bir Kartezyen düzlemde A'nın elemanlarını yatay ekseninde, B'nin elemanlarını da dikey ekseninde göstererek elde ettiğimiz (x, y) noktalarının kümesine β 'nin grafiği denir.

Ör: $\beta = \{(a, 1), (a, 4), (b, 1), (c, 5)\}$



Tanım: A, B, C, D kümeleri verilsin $B \cap C \neq \emptyset$ olsun. $\beta \subseteq A \times B$ ve $\gamma \subseteq C \times D$

olsun β ile γ 'nin bileşkesi $\gamma \circ \beta$ ile gösterilir, ve şöyle tanımlanır.

$$\gamma \circ \beta = \{(x, z) : \exists y \in B \text{ s.t. } (x, y) \in \beta \text{ ve } (y, z) \in \gamma\}$$

Ör: $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{c, d, e\}$, $D = \{1, 3, 5\}$
 $\beta = \{(2, a), (2, c), (6, c), (8, d)\}$; $\gamma = \{(c, 1), (d, 3), (c, 5), (e, 1)\}$
 $\downarrow \subseteq A \times B$ $\subseteq C \times D$

$\gamma \circ \beta = \{(2, 1), (2, 5), (6, 1), (8, 3)\}$

Bağıntının Özellikleri

Tanım: $\beta \subseteq A \times A$ olsun. Eğer, her $x \in A$ için $(x, x) \in \beta$ ise β 'ya yansıyan bir bağıntı denir.

Ör: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olsun Buna göre:

$\alpha_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (5, 1)\}$ ✓

$\alpha_2 = \{(1, 4), (4, 2), (2, 2), (4, 4), (5, 5)\}$ ✗

Tanım: A bir küme ise $x \in A$ için (x, x) şeklindeki bütün sıralı ikililerin kümesine A 'nın köşegeni denir ve I_A ile gösterilir. O halde, $I_A = \{(x, x) | x \in A\}$ 'dir β yansıyorsa $I_A \subseteq \beta$ 'dir.

Tanım: $\beta \subseteq A \times A$ olsun. Eğer, her $(x, y) \in \beta$ için $(y, x) \in \beta$ ise β 'ya bir simetrik bağıntıdır denir. Buradan da, β simetriktir $\Leftrightarrow \beta = \beta^{-1}$

Ör: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olsun.
 $\beta_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ ✓ $\beta_2 = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$ ✓
 $\beta_3 = \{(1, 5), (3, 3), (3, 4), (4, 3)\}$ ✗

Tanım: $\beta \subseteq A \times A$ olsun $x \neq y$ o.ö; eğer, her $(x, y) \in \beta$ için $(y, x) \notin \beta$ ise β 'ya ters simetrik bir bağıntı denir. Denk olarak; $(x, y) \in \beta \wedge (y, x) \in \beta \Rightarrow x = y$ önermesi doğruysa ters simetriktir. Buradan da, β ters simetriktir

$\Leftrightarrow \beta \cap \beta^{-1} \subseteq I_A$
 $\begin{matrix} (x, y) & (y, x) & (x, x) \end{matrix}$

Ör: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olsun.
 $\beta_1 = \{(4, 4), (2, 2), (3, 3)\}$; $\beta_2 = \{(1, 3), (3, 1), (4, 5)\}$
 $\beta_3 = \{(1, 5), (5, 1)\}$; $\beta_4 = \{(1, 3), (4, 5)\}$
 $\begin{matrix} \text{3} & \text{5} & \text{1} \\ \text{1} & \text{3} & \text{5} \end{matrix}$ $\begin{matrix} \text{5} & \text{1} & \text{3} \\ \text{1} & \text{3} & \text{5} \end{matrix}$

Tanım: $\beta \subseteq A \times A$ olsun. Eğer, $(x,y) \in \beta \wedge (y,z) \in \beta$ iken $(x,z) \in \beta$ oluyorsa β 'ya geçişken bir bağıntı denir. β geçişkendir $\Leftrightarrow \beta \circ \beta \subseteq \beta$ 'dir

ör $A = \{1,2,3,4,5\}$ olsun

$\times \beta_1 = \{(1,3), (3,1), (1,1)\}, \beta_2 = \{(2,3), (3,5), (2,5), (5,3), (5,5), (3,3)\}$ ✓

$\times \beta_3 = \{(4,5), (5,1), (1,3)\}$ olsun.

$(3,1) \in \beta_1 \wedge (1,3) \in \beta_1$ fakat $(3,3) \notin \beta_1$

çünkü $(4,1) \notin \beta_3$

ör: $A = \{1,2,3,4,5\}$ olsun.

$\beta_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (3,4), (4,3), (3,5)\}$

Sembolik geçişme

y, S, TS, G
+ - - -
yansıma

$\beta_2 = \{(1,2), (2,1), (1,1), (2,2), (4,5)\}$

y, S, TS, G
- - - +

$\beta_3 = \{(1,2), (2,1), (1,1), (3,4)\}$

y, S, TS, G
- - - -

ör $\mathbb{Z}$ 'te $a \beta b \Leftrightarrow 3 \mid a+2b$ şeklinde tanımlanan bağıntının özelliklerini inceleyiniz.

(i): $\beta = \{(a,b) : 3 \mid a+2b\} \forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a,a) \in \beta \Rightarrow 3 \mid a+2a \checkmark$

(ii): $(a,b) \in \beta$ olsun $\Rightarrow 3 \mid a+2b \Rightarrow \frac{a+2b}{3} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow a+2b = 3k$

$\Rightarrow 2a + 4b = 6k \Rightarrow 2a + b = 6k - 3b$
 $\downarrow$
 $3b + b = 3(2k - b) = 3u \Rightarrow b+2a = 3u$

$\Rightarrow 3 \mid b+2a \Rightarrow (b,a) \in \beta \rightarrow$ Simetrik.

(iii): Ters simetrik değildir. $(1,4) \in \beta$ $(4,1) \notin \beta \rightarrow$ Ters simetrik değil.

(iv): $(a,b) \in \beta \wedge (b,c) \in \beta$ olsun $\Rightarrow (a,c) \in \beta$

$3 \mid a+2b$
 $\downarrow$
 $a+2b = 3k_1$

$3 \mid b+2c$
 $\downarrow$
 $b+2c = 3k_2$

$\Rightarrow$

$a+2b = 3k_1$
 $b+2c = 3k_2$

$\downarrow$
 $a+2c = 3(k_1 - k_2)$

$\Rightarrow 3 \mid a+2c$

$\downarrow$
 $a, c \in \beta$
geçişkendir.

Tanım $\beta, A \neq \emptyset$ üzerinde tanımlı olsun. Eğer β yansayan, simetrik ve geçişken ise β 'ya bir denklik bağıntısı denir.

ör:

$\mathbb{Z}$ 'te tanımlı $\beta\{x, y\}: x-y \text{ çift tamsayıdır.}$ bağı denklik bağı olurmu?

(i): $\forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x, x) \in \beta \Rightarrow x-x=0 \checkmark$

(ii): $(x, y) \in \beta \Rightarrow x-y=2k \Rightarrow -(y-x)=2k \Rightarrow y-x=-2k \checkmark$

(iii): $(x, y) \in \beta \wedge (y, z) \in \beta$
 $x-y=2t$
 $y-z=2u$
 $\hline x-z=2(t+u)=2k$

$(x, z) \in \beta \Rightarrow$ geçişken dir $\Rightarrow$ Denklik bağıntısı.

Tanım: β , bir A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun $(x, y) \in \beta$ ise y elemanı x elemanına β bağıntısına göre denktir denir. x elemanına denk olan bütün elemanların kümesine x 'in denklik sınıfı denir. ve $\bar{x}$ ile gösterilir, yani $\bar{x} = \{y: (x, y) \in \beta\}$

ör:

$\mathbb{Z}$ 'te tanımlı $\beta = \{(x, y): 3|x-y\}$ şeklinde verilsin.

$\bar{0} = \{y: (0, y) \in \beta\} \Rightarrow 3|0-y \Rightarrow 3|-y \Rightarrow -y=3k \Rightarrow y=-3k$

$\bar{0} = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$

$\bar{1} = \{y: (1, y) \in \beta\} \Rightarrow 3|1-y \Rightarrow 1-y=3t \Rightarrow y=1-3t$

$\bar{1} = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$

$\bar{2} = \{y: (2, y) \in \beta\} \Rightarrow 3|2-y \Rightarrow 2-y=3u \Rightarrow y=2-3u$

$\bar{2} = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$

Teorem: β bir A kümesi üzerindeki denklik bağıntısı olsun. Buna göre

(i) $\forall a \in A$ için $\bar{a} \neq \emptyset$

(ii) $\forall a, b \in A$ için ya $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$ veya $\bar{a} = \bar{b}$ dir.

(iii) $A = \bigcup_{a \in A} \bar{a}$ 'dir

İspat: (i) Bağntı yansıyan old' dan , $a \in \bar{a}$ olmak zorundadır.

$\bar{a} \neq \emptyset$ 'dir

(ii) $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ olsun $\Rightarrow \bar{a} = \bar{b}$

$$c \in \bar{a} \cap \bar{b} \Rightarrow c \in \bar{a} \wedge c \in \bar{b} \quad x \in \bar{a} \text{ olsun}$$

$$(x, a) \in \beta \wedge (a, c) \in \beta \Rightarrow (x, c) \in \beta$$

$$(x, c) \in \beta \wedge (c, b) \in \beta \Rightarrow (x, b) \in \beta \Rightarrow x \in \bar{b} \Rightarrow x \in \bar{a}$$

$$\Rightarrow \bar{a} = \bar{b} \quad \checkmark$$

(iii) : A 'daki her eleman bir denklik sınıfına ait old. 'dan ispat aşktır.

Tanım:

β , bir A kümesinde bir denklik bağıntısı olsun. β 'nin A 'da belirlediği

denklik sınıflarının kümesine A 'nın β 'ya göre bölüm kümesi denir.

ve A/β ile gösterilir. yani $A/\beta = \{\bar{a} : a \in A\}$ 'dir.

$$\mathbb{Z}/\beta = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$$

Tanım: $A \neq \emptyset$ olsun. $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ ailesi verilsin. Eğer, aşağıdaki

şartlar sağlanıyorsa $\mathcal{A}$ ailesine A kümesinin bir ayrımı

(veya parçalanması) denir:

(i): $\forall i \in I$ için $A_i \neq \emptyset$ (ii): $\forall i \neq j$ için, $A_i \cap A_j = \emptyset$

(iii): $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ 'dır.

Ör: $A = \{1, 2, \dots, 8\}$ olsun.

$$\mathcal{A} = \{ \overset{A_1}{\{1, 4, 5\}}, \overset{A_2}{\{2, 3\}}, \overset{A_3}{\{6, 8\}}, \overset{A_4}{\{7\}} \}$$

$$B = \{ \bar{1}, \bar{2}, \bar{6}, \bar{7} \}$$

Teorem: β , bir A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun.

β 'nin A 'da ayırdığı denklik sınıfları (yani, A/β) A 'nın

bir ayrımın oluşturur. Tersine A 'nın her bir ayrımı verilen

ayrımındaki her küme bir denklik sınıfı, o.ş bir denklik bağıntısı belirlenir.

Ör: $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ kümesinin bir ayrımı: $\mathcal{A} = \{\{a, e\}, \{b, c, d, f\}, \{g\}\}$ olsun.

$\beta = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (g, g)\}, (a, e), (e, a), (b, c), (c, b), (b, d), (d, b), (c, d), (d, c), (c, f), (f, c), (d, f), (f, d)\}$

$A/\beta = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$

$\bar{b} = \{b, c, d, f\}$

$\bar{c} = \{c, b, d, f\}$

Tanım: β bir $A \neq \emptyset$ üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer, β yansıyan ters simetrik ve geçişken ise β 'ya bir sıralama bağıntısı denir. A kümesinde sıralanmış bir küme denir. Sıralama bağıntıları $\leq, \leq, \leq, \dots$ sembollerle gösterilir.

Ayrıca, $(x, y) \in \leq$ ise bunu x, y 'den önce gelir şeklinde okuruz.
 $x \leq y$

Tanım: $\leq$, A 'da tanımlı bir sıralama bağıntısı olsun. Eğer, $x, y \in A$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise x ile y elemanlarına karşılaştırılabilir elemanlar denir.

Eğer, A 'nin bütün elemanları karşılaştırılabilir ise $\leq$ bağıntısına tam sıralama bağıntısı, A 'ya da tam sıralı küme denir.

Ör: $\mathbb{N}$ kümesinde $\leq$ bağıntısını düşünelim $\forall a \in \mathbb{N}$ için $a \leq a$ $y \checkmark$

$x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ T.S

$x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ G $\checkmark$

$\Rightarrow \mathbb{N}$ bir sıralama bağıntısı olur. $\rightarrow$ Tam sıralıdır.

Ör: $A = \{a, b, c\}$ kümesinin kuvvet kümesi $p(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ olsun $p(A)$ üzerindeki $\subseteq$ bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır. bağıntı mıdır?

$$(A, A) \in \subseteq \Rightarrow A \subseteq A \quad \checkmark$$

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B \quad \checkmark$$

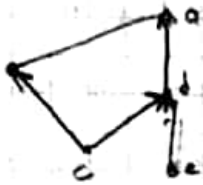
$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C \quad \checkmark \rightarrow p(A)'da \subseteq \text{ bir sıralama bağıntısı}$$

$$\{a, b\} \not\subseteq \{a, c\} \vee \{a, c\} \not\subseteq \{a, b\} \rightarrow \text{Tam sıralı değildir.}$$

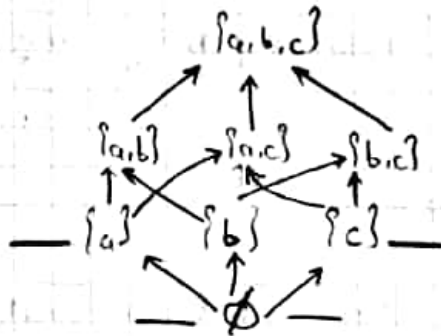
Tanım: Bir $\subseteq$ sıralama bağıntısının şeması $x \subseteq y$ ve $x \neq y$ için x 'ten y 'ye yukarı yönde bir ok çizilerek elde edilen bir şekildir.

Not: $x \subseteq y$ ve $y \subseteq z$ ise x 'ten z 'ye ok çizilmez.

Ör: $A = \{a, b, c, d, e\}$ üzerinde bir $\beta = \{(a/a), (b/b), (c/c), (d/d), (c/e), (c,d), (d,a), (c/a), (c,b), (b/a), (e,d), (e/a)\}$ şeklinde tanımlansın.



Ör: $\mathbb{N}$ kümesi ve $p(A)$ kuvvet kümesi için şemalar.



Tanım: $\leq$ bağı A üzerinde bir sıralama bağıntısı olsun $a \in A$ olsun $\forall x \in A$ için, $x \leq a \Rightarrow x = a$ önermesi doğru ise a elemanına bir küçük eleman (minimal eleman) denir. Yani, A kümesinde a 'dan önce gelen eleman sadece a ise a elemanına bir küçük ~~eleman~~ eleman denir. Benzer şekilde, her $x \in A$, $b \leq x \Rightarrow x = b$ önermesi doğruysa b 'ye bir büyük (maksimal ele) denir.

Tanım: $\leq$ bağ A üzerinde bir sıralama bağıntısı olsun. $B \subseteq A$.

Eğer her $x \in B$ için $b \leq x$ oğ bir $b \in B$ varsa b 'ye B 'nin en küçük elemanı (minimum) denir. Benzer şekilde, eğer her $x \in B$ için $x \leq c$ oğ bir $c \in B$ varsa c 'ye B 'nin en büyük elemanı (maksimum) denir.

Teorem:

Bir $B \subseteq A$ kümesinin maksimumu ve minimumu tektir.

Ç: kabul edelim ki b_1 ve b_2 , B 'nin iki minimumu olsun.

$$b_1 \text{ min: } b_1 \leq b_2 \quad b_2 \text{ min: } b_2 \leq b_1 \Rightarrow b_1 = b_2$$

Ör: $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ kümesinde bir bağıntı şu şekilde tanımlanıyor

$$x \leq y \Leftrightarrow x|y \text{ olsun.}$$

$$\text{minimal: } x \leq a \Rightarrow x = a$$

$$\begin{aligned} \cancel{x \leq a} \quad x \leq a &\Rightarrow x|a \Rightarrow \frac{a}{x} = k \\ &\downarrow \\ &\{2, 3, 5, 7\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{maksimal: } b \leq x &\Rightarrow x = b \rightarrow b \leq x \Rightarrow b|x \Rightarrow \frac{x}{b} = k \\ &\downarrow \\ &\{6, 2, 8, 9, 10\} \end{aligned}$$

$$B = \{2, 4, 8\} \text{ olsun} \rightarrow \min B = 2 \quad \max B = 8$$

$$C = \{2, 4, 8, 10\} \quad E = \{3, 5, 6, 10\}$$

$$D = \{2, 5, 10\}$$